Übungsstunde 7:

Themen heute:

- Lineare Abbildungen
- Iso- & Automorphismus
- Darstellungsmatrizen zu linearen Abbildungen
- Kommutative Diagramme
- Koordinatenabbildung
- Abbildungsmatrizen unter einem Basiswechsel
- Verkettung linearer Operationen

Lineare Abbildungen:

V, W zwei VR, $\mathcal{F}: V \to W$, $x \mapsto \mathcal{F}(x) = b$

$\mathcal{F}$ heisst linear, falls:

(i) $\forall x, y \in V$: $\quad \mathcal{F}(x+y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$

(ii) $\forall x \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{F}(\alpha x) = \alpha \cdot \mathcal{F}(x)$

$\rightsquigarrow$ überprüft: $\mathcal{F}(\alpha x + y) = \alpha \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$

Bsp. 7.1: $\mathcal{F}: V \to W$, $\underline{x} \mapsto \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$ — bekannte Rechenregeln verwenden

$$\mathcal{F}(\alpha \underline{x} + y) = \underline{\underline{A}}(\alpha \underline{x} + y) = \alpha \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{\underline{A}}y = \alpha \mathcal{F}(\underline{x}) + \mathcal{F}(y) \quad \square$$

Bsp. 7.2: $\mathcal{F}: V \to W$, $x \to 0$

$$\mathcal{F}(\alpha \underline{x} + y) = 0 = \alpha \cdot 0 + 0 = \alpha \mathcal{F}(\underline{x}) + \mathcal{F}(y) \quad \square$$

Bsp. 7.3: $\mathcal{F}: V \to W$, $x \mapsto x + \gamma$, $\gamma \neq 0$ $\quad ↯$

$$\mathcal{F}(\alpha x + y) = (\alpha x + y) + \gamma \neq \alpha x + \alpha\gamma + y + \gamma = \alpha \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$$

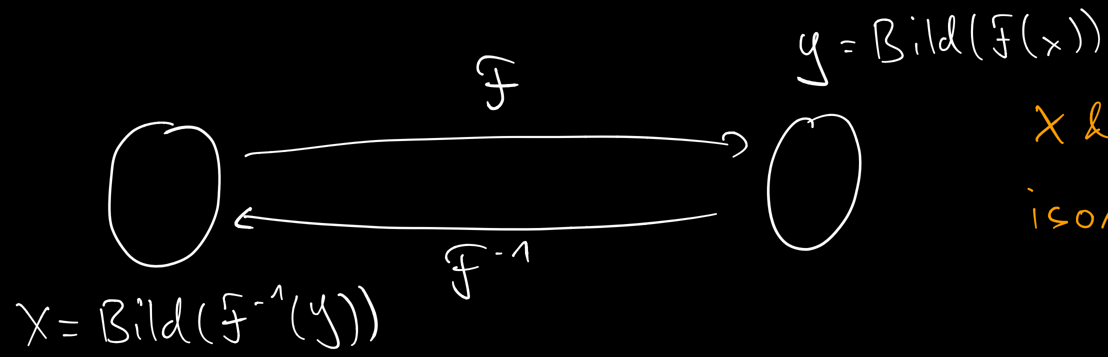
Bsp. 7.4: $\mathcal{F}: V \to W$, $x \mapsto \frac{d}{dt} x$

$$\mathcal{F}(\alpha x + y) = \frac{d}{dt}(\alpha x + y) = \frac{d}{dt}(\alpha x(t) + y(t)) = \alpha \frac{d}{dt} x(t) + \frac{d}{dt} y(t) = \alpha \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$$

$\square$

Isomorphismus / Automorphismus:

Ein Isomorphismus ist eine strukturerhaltende Abbildung zweier Strukturen vom selben Typ
→ z.B. zweier Vektorräume.

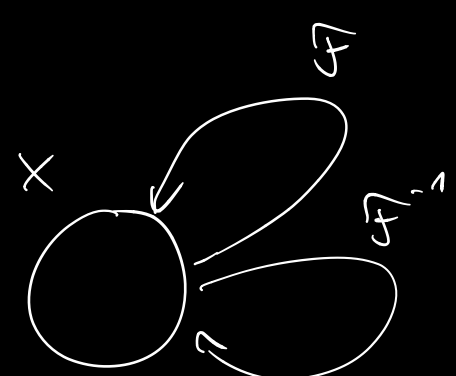


X & Y sind isomorph

Zwei Strukturen heissen zueinander isomorph, falls es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Theorem: Jeder Vektorraum ist isomorph zum $\mathbb{R}^n$.

Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus einer Struktur auf sich selbst.



X ist automorph zu sich selbst

Lineare Abbildungen beschreiben solche Iso- bzw. Automorphismen genau dann, wenn sie bijektiv sind (sprich vollen Rang haben).

Abbildungsmatrizen / Darstellungsmatrizen lin. Abb.

Bsp. 7.5: Sei $V = \mathcal{P}_2$, $W = \mathcal{P}_1$, $F: V \to W$, $p(x) \mapsto p'(x) + p''(x)$

Koordinatenwahl / Basiswahl: $B = \{ b^{(1)} = 1, b^{(2)} = x, b^{(3)} = x^2 \}$
$C = \{ c^{(1)} = 1, c^{(2)} = x \}$

$\Rightarrow V: \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$, $W: \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$ So muss ich einen Koordinatenvektor in den Basen B & C interpretieren!

$$\left.\begin{array}{lclcl} B & \xrightarrow{F} & & & \\ 1 & \longrightarrow & 0 & = & 0\,1 + 0x \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x & \longrightarrow & 1 & = & 1\,1 + 0x \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ x^2 & \longrightarrow & 2x+2 & = & 2\,1 + 2x \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Bsp. 7.6:

$$\begin{array}{ccc} V = \mathcal{P}_2 & & W = \mathcal{P}_1 \\ p(x) = x^2 + 4x - 7 & \xrightarrow{F} & 2x + 4 + 2 = 2x + 6 = q(x) \\ k_x \downarrow \uparrow k_x^{-1} & & k_y \downarrow \uparrow k_y^{-1} \\ \underline{x} = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} & \xrightarrow[\underline{\underline{A}}]{} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{b} \\ \mathbb{R}^3 & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Kommutative Diagramme:

$$A \xrightarrow{f} B$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

im Allgemeinen:

$f(g(x)) \neq g(f(x))$

$h(x) \neq g(f(x))$

Falls $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \Leftrightarrow$ Das Diagramm kommutiert

"Es ist egal, welchen Weg wir wählen."

Koordinatenabbildung:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[d, shift right, "k_X"'] & Y \arrow[l, shift left, "F^{-1}"] \arrow[d, shift right, "k_Y"'] \\ V = \mathbb{R}^n \arrow[u, shift right, "k_X^{-1}"'] \arrow[r, shift left, "\underline{\underline{A}}"] & W = \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \arrow[u, shift right, "k_Y^{-1}"'] \arrow[l, shift left, "\underline{\underline{A}}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

überführt jeden Vektorraum in einen entsprechenden kartesischen Vektorraum. $\rightarrow$ Isomorphe Abbildung?

Abbildungsmatrix unter Koordinatenwahl / Basiswechsel:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large, column sep=huge]
X \arrow[r, shift left, "\mathcal{F}"] \arrow[d, shift right, "k_X"'] & Y \arrow[l, shift left, "\mathcal{F}^{-1}"] \arrow[d, shift right, "k_Y"'] \\
\mathbb{R}^n \quad \tilde{V} \arrow[r, shift left, "\underline{\underline{\tilde{A}}}"] \arrow[u, shift right, "k_X^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "\underline{\underline{T}}"'] & \tilde{W} \quad \mathbb{R}^m \arrow[l, shift left, "\underline{\underline{\tilde{A}}}^{-1}"] \arrow[u, shift right, "k_Y^{-1}"'] \arrow[d, shift right, "\underline{\underline{T}}'"'] \\
V \arrow[r, shift left, "\underline{\underline{A}}"] \arrow[u, shift right, "\underline{\underline{T}}^{-1} = \underline{\underline{S}}"'] & W \arrow[l, shift left, "\underline{\underline{A}}^{-1}"] \arrow[u, shift right, "\underline{\underline{S}}'"']
\end{tikzcd}
$$

Bsp. 7.7:
(Beispiel 80 Zardini)

$$\mathcal{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 7x+5y-8z \\ 5x+3y-4z \\ -x-3y+8z \end{bmatrix}$$

a) $\mathcal{E} = \left\{ \underline{e}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{e}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{e}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\left.\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 5 \;'' \; + 3 \;'' \; - 3 \;'' \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} = -8 \;'' \; - 4 \;'' \; + 8 \;'' \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \underline{\underline{\tilde{A}}} = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

b) $\mathcal{B} = \left\{ \underline{b}^{(1)} = \underline{e}^{(1)}, \underline{b}^{(2)} = \underline{e}^{(1)} + \underline{e}^{(2)}, \underline{b}^{(3)} = \underline{e}^{(2)} + \underline{e}^{(3)} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Wollen $\mathcal{B} \xrightarrow{T} \mathcal{E}$ & $\mathcal{E} \xrightarrow{T^{-1}} \mathcal{B}$

B

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = 1 \;\text{"}\; + 1 \;\text{"}\; + 0 \;\text{"}\; \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = 0 \;\text{"}\; + 1 \;\text{"}\; + 1 \;\text{"}\; \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}}$$

$\rightarrow$ Gauss-Jordan $\underline{\underline{T}} \,|\, \underline{\underline{I}} \rightarrow \underline{\underline{I}} \,|\, \underline{\underline{T}}^{-1}$

$$\underline{\underline{T}}^{-1} = \begin{bmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "\underline{\underline{\tilde{A}}}"] \arrow[d, shift left, "T^{-1}"] & \mathcal{E} \arrow[d, shift left, "T^{-1}"] \\
B \arrow[r, "\underline{\underline{A}}"'] \arrow[u, shift left, "T"] & B \arrow[u, shift left, "T"]
\end{tikzcd}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}}^{-1}\,\underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{\underline{T}} = \dots \text{ mühsame Rechnung}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\6\\-1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\12\\-4\end{matrix} & \begin{matrix}3\\-6\\5\end{matrix}\end{bmatrix}}}$$

Alternativ: Macht dasselbe wie in a)

$$\begin{array}{ccc} B & F & \underline{\underline{\tilde{A}}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}7\\5\\-1\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \mathrel{\hat{=}} \begin{bmatrix}1\\6\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}12\\8\\-4\end{bmatrix} = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}-3\\-1\\5\end{bmatrix} = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

Verkettung lin. Abb.:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, shift right, "k_x"'] & W \arrow[r, "G"] \arrow[d, shift right, "k_y"'] & U \arrow[d, shift right, "k_z"'] \\ A \arrow[r, "\underline{\underline{M}}_A^B"'] \arrow[u, shift right, "k_x^{-1}"'] \arrow[rr, bend right, "\underline{\underline{M}}_A^C"'] & B \arrow[r, "\underline{\underline{M}}_B^C"'] \arrow[u, shift right, "k_y^{-1}"'] & C \arrow[u, shift right, "k_z^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$(G \circ F)(x)$

$G(F(x))$

$$\underline{\underline{M}}_A^C = \underline{\underline{M}}_B^C \circ \underline{\underline{M}}_A^B$$

$$= \underline{\underline{M}}_B^C \cdot \underline{\underline{M}}_A^B$$

(Alternative Schreibweise:

$$\underline{\underline{M}}_A^B = \underline{\underline{M}}_{BA}$$

$$\underline{\underline{M}}_A^B \, [\underline{x}]_A = [\underline{x}]_B$$

$$= \underline{\underline{M}}_{BA} \; {}_A x = {}_B x \quad)$$